

Tensione per un fluido in quiete ed equazione cardinale della statica.

Nel caso statico le tensioni tangenziali sono nulle, quindi:

$$\begin{cases} t^{(1)}_{11} = t^{(2)}_{11} \\ t^{(1)}_{12} = t^{(2)}_{12} \\ t^{(1)}_{13} = t^{(2)}_{13} \end{cases} \Rightarrow t^{(1)} = t^{(2)} = t^{(3)} = t^{(4)} = -p \quad \text{tensione isotropa}$$

$$\Rightarrow \Pi = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = -p \mathbb{I}$$

$$[p] = M L^{-1} \cdot T^{-2} \quad (\text{pressione})$$

Nell'equilibrio delle forze:

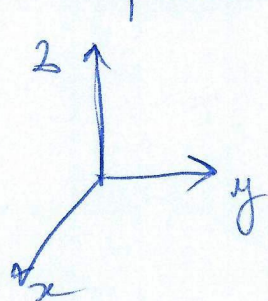
$$\int_V \rho \underline{f} dV + \int_S \underline{t} dS = 0 \Rightarrow \int_V \rho \underline{f} dV - \int_S p \underline{n} dS = 0$$

Applicando il teorema del gradiente $\int_V \underline{F} \underline{n} dS = \int_V \nabla F dV$

$$\int_V \rho \underline{f} dV - \int_V \nabla p dV = 0 \Rightarrow \int_V (\rho \underline{f} - \nabla p) dV = 0$$

$$\Rightarrow \rho \underline{f} - \nabla p = 0$$

È l'equazione cardinale della statica. In particolare:



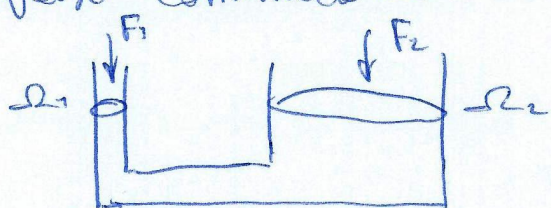
$$\underline{f} = (0, 0, -g)$$

$$\rho \underline{f} = \nabla p$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

$\Rightarrow$ pressione costante su piani orizzontali

Barre comunicanti:



$$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{\Omega_1} = \frac{F_2}{\Omega_2}$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} F_1$$

Principio del barico idraulico o di Pascal.

Variazione di pressione in un fluido

Per fluidi incompressibili vale $\rho = \text{cost.}$ Inoltre:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow p = -\rho g z + \text{cost} = -\gamma z + \text{cost}$$

Introduciamo il carico piezometrico $h = \frac{p}{\rho g} + z = \frac{p}{\gamma} + z$:

$$h = \frac{-\gamma z + \text{cost}}{\gamma} + z = \text{cost}$$

Per fluidi comprimibili vale $\rho = \rho(p)$. Prendiamo una gas perfetto, cioè per cui valga $pV = nRT$ e sottoposto a una isoterma: $pV = \text{cost} \Rightarrow \frac{p}{\rho} = \text{cost} \Rightarrow \frac{p}{\rho} = \text{cost} = \frac{p_0}{\rho_0}$
 $\Rightarrow p_0 = \frac{p}{\rho} \rho_0$. Otteniamo:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(p)g = -\frac{p}{p_0} \rho_0 g \Rightarrow \frac{\partial p}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} dz$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} dz \Rightarrow \ln p = -\frac{\rho_0 g}{p_0} z + \text{cost}$$

Poniamo $\text{cost} = C_1$ e $p = p_0$ quando $z = z_0$, con $\rho = \rho_0$:

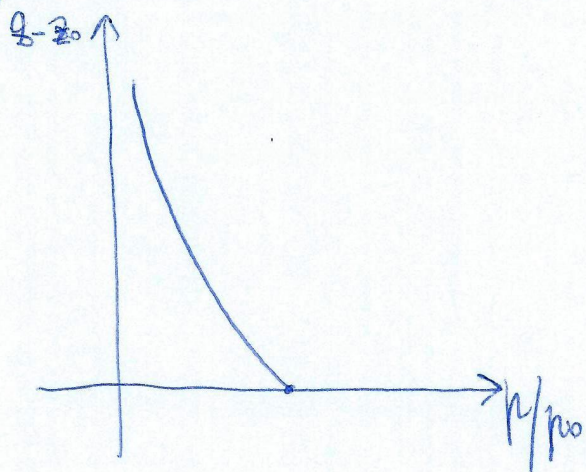
$$\ln p_0 = -\frac{\rho_0 g}{p_0} z_0 + C_1 \Rightarrow C_1 = \ln p_0 + \frac{\rho_0 g}{p_0} z_0$$

Allora

$$\ln p = -\frac{\rho_0 g}{p_0} z + \ln p_0 + \frac{\rho_0 g}{p_0} z_0$$

$$\Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} (z - z_0) \xrightarrow{\text{exp}} p = p_0 \cdot e^{\left[-\frac{\rho_0 g}{p_0} (z - z_0)\right]}$$

Graficamente:



Ripetendo l'operazione da:

$$\frac{\rho_0 g}{p_0} = \frac{1}{\frac{p_0}{\rho_0 g}}$$

$$\Rightarrow p = p_0 \cdot e^{-\left(\frac{z - z_0}{\frac{p_0}{\rho_0 g}}\right)}$$